

数学参考答案和评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 【答案】B

【命题意图】本题考查集合的关系，意在考查学生的逻辑推理和数学抽象素养.

【解析】因为 $A \cap (\complement_U B) = \emptyset$ ，所以 $A \subseteq B$ ，因此B正确. 故选B

2. 【答案】D

【命题意图】本题考查复数的运算，意在考查学生对基础知识的掌握程度.

【解析】因为 $z(1-i)=1+2i$ ，所以 $z = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ ，所以 $1+\bar{z} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ ，所以 $1+\bar{z}$ 在复平面内对应的点在第四象限. 故选 D.

3. 【答案】B

【命题意图】本题考查充分必要条件，并融合函数，数列和解三角形等知识，考查学生对基本知识的融合和掌握情况.

【解析】选项 A， $a=1$ 时，函数 $f(x) = x^2 - (1-a^2)x + 3$ 是偶函数，但函数 $f(x) = x^2 - (1-a^2)x + 3$ 是偶函数，可得 $a = \pm 1$ ，故 P 是 Q 的充分不必要条件；选项 B，在 $\triangle ABC$ 中， $\triangle ABC$ 是等边三角形可得 $\sin A = \sin B = \sin C$ ，当 $\sin A = \sin B = \sin C$ 时， $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 P 和 Q 互为充要条件；选项 C，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2n^2 - 3n + 1$ ，可得数列不是等差数列，当数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列时，因为不知首项，所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 不确定，所以 P 是 Q 的既不充分也不必要条件；因为 $x > 1$ 可得 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ，当 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 时，可得 $x > 0$ ，所以故 P 是 Q 的充分不必要条件，故选 B.

4. 【答案】D

【命题意图】本题考查计数原理，意在考查学生对日常生活中事物的认知和数学应用的思想.

【解析】依题意，由于四条升腾之龙位置可以不同，四条降沉之龙相对位置也可以不同，

但升腾之龙必须位居第 1, 3, 7, 9 位置, 降沉之龙必须位居第 2, 4, 6, 8 位置, 所以不同的雕刻模型共有 $A_4^4 \cdot A_4^4$ 种.

5. 【答案】A

【解析】由图象可知, 则 $\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}$, 所以 $T = \pi$, 又 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, $\omega = 2$;

所以 $f(x) = -\sqrt{2} \sin(2x + \varphi)$ 过点 $(\frac{7\pi}{12}, -\sqrt{2})$,

所以 $2 \times \frac{7\pi}{12} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{6}$, 又 $|\varphi| < \pi$, 所以 $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$,

所以 $f(x) = -\sqrt{2} \sin(2x - \frac{2\pi}{3})$,

当 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{2\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, 即 $k\pi + \frac{7\pi}{12} < x < k\pi + \frac{13\pi}{12}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时, 函数单调递

增. 结合选项可知, 答案应选 A.

6. 【答案】C

【命题意图】本题考查双曲线的几何性质和直线与双曲线的位置关系, 意在考查学生的数学抽象和数学运算能力.

【解析】设 P, Q 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

因为线段 PQ 的中点为 $(1, 2)$, 所以 $x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 4$,

因为 $\frac{x_1^2}{4} - y_1^2 = 1, \frac{x_2^2}{4} - y_2^2 = 1$, 所以 $\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{4} - (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0$,

整理得 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{8}$, 即直线 l 的斜率为 $\frac{1}{8}$, 所以直线 l 的方程为 $y - 2 = \frac{1}{8}(x - 1)$, 即

$x - 8y + 15 = 0$.

7. 【答案】B

【命题意图】本题考查统计图表的认识, 意在考查学生对读图, 识图, 数据收集和数据处理的能力.

【解析】对于 A, 国六 B 阶段比国六 A 阶段对 PN 颗粒物排放量要求相同, 故 A 错误;

对于 B, 三款车无论以什么样的相同速度行驶, 甲车消耗汽油最少, 故 B 正确; 对于 C,

由图象可知, 乙车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时, 消耗汽油超过 10 升; 对于 D,

甲车以 80 千米/小时的速度行驶 10km 需要消耗汽油约 1 升, 故 D 错误. 故选 B.

8. 【答案】D

【命题意图】本题考查正态分布，意在考查学生对正态分布密度函数的图象与概率分布的理解.

【解析】由正态分布密度函数可知， $P(X_1 \leq \mu_2) > P(X_2 \leq \mu_1)$,

$$P(X_2 \geq \mu_2) = P(X_3 \geq \mu_3), \quad P(X_1 \leq \mu_2) > P(X_2 \leq \mu_3),$$

$$P(\mu_i - 2\sigma_i \leq X_i \leq \mu_i + 2\sigma_i) = P(\mu_{i+1} - 2\sigma_{i+1} \leq X_{i+1} \leq \mu_{i+1} + 2\sigma_{i+1}), \text{ 故答案选 D.}$$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 【答案】AB.

【命题意图】本题考查解三角形，意在考查正余弦定理的应用和数学抽象素养.

【解析】因为 $B = 2C$ ，所以 $\sin B = \sin 2C$ ，即 $\sin B = 2\sin C \cos C$ ，又 $c = \frac{\sqrt{3}}{2}b$

所以 $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，所以 $\sin C = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，由余弦定理可知， $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ ，化简

得到 $a^2 - 4a + 3 = 0$ ，解得 $a = 3$ 或 $a = 1$ ，

若 $a = 3$ ，故 $A = C = \frac{\pi}{4}$ ，故 $B = \frac{\pi}{2}$ ，不满足，故 $a = 1$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 1 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{2}.$$

故选 AB.

10. 【答案】AD

【命题意图】本题考查等比数列的性质，意在考查学生数学运算素养.

【解析】因为公比为 $q > 1$ ，由 $\begin{cases} a_5 - a_1 = 15, \\ a_2 \cdot a_4 = 16, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a_1 q^4 - a_1 = 15, \\ a_1 q \cdot a_1 q^3 = 16, \end{cases}$ 即 $\frac{q^4 - 1}{q^2} = \frac{15}{4}$ ，所以

$4q^4 - 15q^2 - 4 = 0$ ，解之得 $q^2 = 4$ ，所以 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ q = 2 \end{cases}$ ，所以 $a_n = 2^{n-1}$ ， $S_n = 2^n - 1$ ，所

以 $S_{n+1} = 2^{n+1} - 1 = 2S_n + 1$ ， $S_n + 1 = 2^n$ ，所以 $\log_3(S_n + 1) = n \log_3 2$ ，所以数列

$\{\log_3(S_n + 1)\}$ 是等差数列，对任意的正整数 n, k ， $S_{n+k} - S_n = 2^{n+k} - 2^n = (2^k - 1)2^n$ ，

所以数列 $\log_2(S_{n+k} - S_n) = n + \log_2(2^k - 1)$ ，因为所以数列 $\{\log_2(S_{n+k} - S_n)\}$ 是公差为

1 的等差数列，故正确的为 AD.

11. 【答案】BCD

【命题意图】本题考查平面向量的基本运算，意在考查学生对基本运算和基础知识的掌握情况.

【解析】因为向量 $\mathbf{a} = (1, \sin \theta)$, $\mathbf{b} = (\cos \theta, \sqrt{2}) (0 \leq \theta \leq \pi)$, 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $\cos \theta \sin \theta = \sqrt{2}$, 这样的 θ 不存在, 故 A 错误; 若 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, 即 $1 + \sin^2 \theta = \cos^2 \theta + 2$, 所以 $1 + \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta + 2$, 所以 $\sin^2 \theta = 1$, 所以 B 正确; 当 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sqrt{3}$ 时, $\cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta = \sqrt{3} \sin(\theta + \varphi)$, 其中 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 且 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin \theta = \cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 故 C 正确; 因为 $\tan \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta = 0$, 故 D 正确; 故选 BCD.

12. 【答案】ABC

【命题意图】本题考查函数的奇偶性, 单调性, 对称性等函数性质, 意在考查学生的数学抽象和逻辑推理素养.

【解析】由 $f(x)$ 为奇函数, $f(-x) = f(x+1)$, 所以函数 $f(x)$ 关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 所以 $f(x) = -f(x+1) = -[-f(x+2)] = f(x+2)$, 故周期 $T = 2$, 当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \log_2(1+x)$, 所以 $f(1) = f(0) = f(2) = 0$, 所以 $i \in \mathbf{N}^*$, 则 $\sum_{i=1}^n f(i) = 0$; 点 $(-1, 0)$ 为 $f(x)$ 的一个对称中心, 所以 $\sum_{i=1}^{2021} f(\frac{i}{2}) = \log_2 \frac{3}{2}$, 可得 $\sum_{i=1}^{2021} f(\frac{i}{2}) \neq \log_2 (\frac{3}{2})^{1011}$, 故选 ABC.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 【答案】45

【命题意图】本题考查二进制数和数学文化想结合的问题, 意在考查学生的阅读理解能力.

【解析】六十四卦中符号“离卦 ”表示二进制数的 101101, 对应十进制数的计算为 $1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 = 45$.

14. 【答案】 $y = 2x - 4$ $y = -1$

【命题意图】本题考查抛物线的几何形状以及直线与抛物线的位置关系.

【解析】已知直线过点 $(0, -4)$, 且倾斜角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以正切值为 2, 可得直线

方程为 $y=2x-4$. 联立得方程组 $\begin{cases} x^2=2py(p>0) \\ y=2x-4 \end{cases}$, 可得 $x^2-4px+8p=0$, 又直线与抛物

线相切, 所以 $\Delta=16p^2-32p=0$, 解得 $p=2$, 所以抛物线的准线方程为 $y=-1$.

15. 【答案】乙

【命题意图】本题考查推理与证明, 意在考查学生的逻辑推理素养.

【解析】因为三人中, 只有一个人喝酒也只有一个人说的是真话, 如果甲说的是真话, 那么乙说的也是真话, 得出矛盾的; 如果乙说的是真话, 那么丙和甲说的都是假话, 且喝酒的是甲或丙, 如果是甲喝酒, 则有至少两个人说的是真话, 如果是乙丙喝酒了, 甲说的是假话, 但是丙说的是真话, 这是矛盾的; 如果丙说的是真话, 那么甲说的是假话, 乙说的也是假话, 所以喝酒的是乙.

16. 【答案】 $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}$

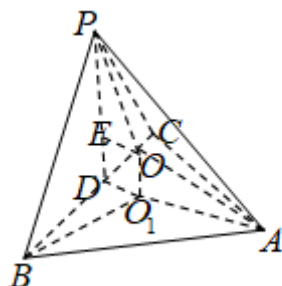
【命题意图】本题考查空间几何体的外接球问题, 意在考查学生的空间想象能力和数学运算素养.

【解析】如图所示, 点 P 在过直线 BC 与平面 ABC 垂直的球的小圆面的圆周上, 当点 P 在平面 ABC 的射影为 BC 中点时, 三棱锥 $P-ABC$ 的体积最大. 设等边 $\triangle ABC$ 的中心为 O_1 , 三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 上, 球 O 的体积为 $4\sqrt{3}\pi$, 所以外接球的半径为 $r=\sqrt{3}$, 因为 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 点 P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内的射影恰好在边 BC 上

设为 D , 过 O 作 $OE \perp PD$, 垂足为 E , 依题意可知, $O_1D = \frac{\sqrt{3}}{3} = EO$, 所以

$PE = \sqrt{PO^2 - EO^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $OO_1 = \sqrt{AO^2 - AO_1^2} = \frac{\sqrt{15}}{3}$, 所以三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值

为 $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}$.



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

【解析】选条件① $S_{15}=120$,

(1) 由题意得 $S_{15} = \frac{15(a_1 + a_{15})}{2} = 120$, 即 $a_{15} = 15$,

又 $a_1 = 1$, 得公差 $d = 1$, 通项公式为 $a_n = n$5 分

(2) 由 (1) 得 $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$. 可得 $\frac{1}{S_n} = \frac{2}{n(1+n)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$,

所以 $T_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = \frac{2n}{n+1}$10 分

分

选条件② $a_5 + a_7 = 12$,

(1) 由题意得 $a_5 + a_7 = 12 = a_1 + 4d + a_1 + 6d = 12$,

又 $a_1 = 1$, 得公差 $d = 1$, 通项公式为 $a_n = n$5 分

(2) 由 (1) 得 $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$. 可得 $\frac{1}{S_n} = \frac{2}{n(1+n)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

所以 $T_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = \frac{2n}{n+1}$ 10 分

选择条件③ $\frac{S_5}{5} - \frac{S_2}{2} = \frac{3}{2}$,

(1) 由题意得 $\frac{a_5 - a_2}{2} = \frac{3}{2}$,

又 $a_1 = 1$, 得公差 $d = 1$, 通项公式为 $a_n = n$5 分

(2) 由 (1) 得 $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$. 可得 $\frac{1}{S_n} = \frac{2}{n(1+n)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

所以 $T_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = \frac{2n}{n+1}$10 分

分

18. (12 分)

【解析】(1) 因为 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,2 分

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7$, 即 $b^2 - 3b - 4 = 0$,

所以 $b = 4$ 或 $b = -1$ (舍).5 分

$$(2) \because \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3}, \therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1}{2},$$

$$\because \angle CAD = \angle BAD, \therefore \frac{c}{b} = \frac{1}{2}.$$

$$\because a = 2, \therefore \text{由余弦定理得, } c^2 + (2c)^2 - 4c^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4, \text{8 分}$$

$$\text{所以, } c^2 = \frac{4}{5-2\sqrt{3}}, \text{10 分}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}2c^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5-2\sqrt{3}}.$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{2}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5-2\sqrt{3}} = \frac{20+8\sqrt{3}}{39}. \text{12 分}$$

.

19. (12 分)

【解析】(1) 设“甲至多命中 1 次”为事件 C , 则

$$P(C) = C_3^0 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 + C_3^1 \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{20}{27}.$$

所以, 甲至多命中 1 次的概率为 $\frac{20}{27}$4 分

(2) 由题意, $X = 0, 2, 3, 5$, $Y = 0, 2, 3, 5$,6 分

$$P(X = 0) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \quad P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9},$$

$$P(X = 5) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$P(Y = 0) = [1 - (1 - p)][1 - (1 - 2p)] = 2p^2,$$

$$P(X = 2) = (1 - p)[1 - (1 - 2p)] = 2p - 2p^2,$$

$$P(X = 3) = [1 - (1 - p)](1 - 2p) = p - 2p^2,$$

$$P(X = 5) = (1 - p)(1 - 2p) = 2p^2 - 3p + 1, \text{8 分}$$

X	0	2	3	5
-----	---	---	---	---

∴ X 的分布列为

P	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
-----	---------------	---------------	---------------	---------------

Y 的分布列为

Y	0	2	3	5
P	$2p^2$	$2p-2p^2$	$p-2p^2$	$2p^2-3p+1$

所以, $E(X) = 0 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{2}{9} + 5 \times \frac{1}{9} = \frac{5}{3}$,

$E(Y) = 0 \times 2p^2 + 2(2p-2p^2) + 3(p-2p^2) + 5(2p^2-3p+1) = 5-8p$. ……10 分

(3) ∵ $E(X) > E(Y)$,

∴ $5-8p < \frac{5}{3}$, 即 $p > \frac{5}{12}$.

所以, p 的取值范围是 $(\frac{5}{12}, \frac{1}{2}]$. ……12 分

20. (12 分)

【解析】(1) 证明: 因为 $DE \parallel AC$, $DF \parallel BC$, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以

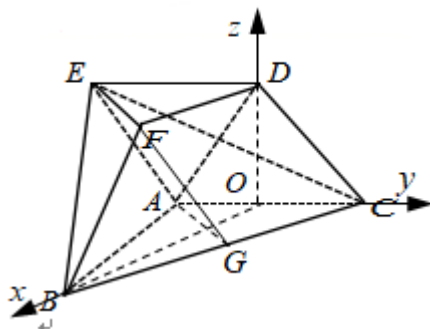
$\angle EDF = \angle ACB = 60^\circ$, 又 $AC = DE = BC = 2DF = 2$, ……4 分

所以 $\triangle EDF$ 中,

由余弦定理可知, $EF = \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ} = \sqrt{3}$, 所以 $EF \perp DF$,

所以 $EF \perp BC$. ……6 分

(2) 设线段 AC 中点为 O , 分别连接 BO , DO .



∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ 都是等边三角形,

∴ $BO \perp AC$, $DO \perp AC$, 即 $\angle BOD$ 就是二面角 $D-AC-B$ 的平面角. 由于二面角

$D-AC-B$ 是直二面角，因此， $\angle BOD = 90^\circ$ 。……8 分

分别以直线 OB ， OC ， OD 为 x 轴， y 轴和 z 轴，建立如图所示的空间坐标系 $O-xyz$ 。

$$\because |AC| = 2,$$

$$\therefore A(0, -1, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0), E(0, -2, \sqrt{3}), G\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = (-\sqrt{3}, -2, \sqrt{3}), \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AG} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right).$$

设平面 BEF 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ，则 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{BE}$ ， $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{EF}$ ，即 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ ，

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0,$$

$$\therefore \begin{cases} -\sqrt{3}x - 2y + \sqrt{3}z = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = 0. \end{cases}$$

不妨取 $x = \sqrt{3}$ 得， $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, -1, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 。……10 分

$$\text{又 } \overrightarrow{OB} = (\sqrt{3}, 0, 0),$$

$$\therefore \cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{OB} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{3}{\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{13}{3}}} = \frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$\therefore \tan \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{OB} \rangle = \frac{2}{3}.$$

由于 $\overrightarrow{OB} = (\sqrt{3}, 0, 0)$ 是平面 $ACDE$ 的一个法向量，所以，平面 $ACDE$ 与平面 BEF 所

成锐二面角的正切值为 $\frac{2}{3}$ 。……12 分

21. (12分)

【解析】(1) 由函数 $f(x) = \ln x + \frac{2a}{x}$ 得，函数 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$$f'(x) = \frac{x-2a}{x^2}. \quad \text{……2 分}$$

当 $a \leq 0$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 是增函数。

当 $a > 0$ 时, 若 $0 < x < 2a$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数; 若 $x > 2a$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数.4 分

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 是增函数 (也可以说成是 $(0, +\infty)$ 上的增函数);

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, 2a]$ 是减函数, 在区间 $[2a, +\infty)$ 是增函数.6 分

(2) 由 $f(x) > g(x)$, 可得 $x \ln x - \frac{x}{2} + 2a > \frac{x}{e^x}$.

分别设 $F(x) = x \ln x - \frac{x}{2} + 2a (a \geq \frac{1}{2})$, $G(x) = \frac{x}{e^x}$,8 分

则 $F'(x) = \ln x + \frac{1}{2}$, $G'(x) = \frac{1-x}{e^x}$.

同 (1) 可知, $F(x)_{\min} = F(\frac{1}{\sqrt{e}}) = 2a - \frac{1}{\sqrt{e}}$, $G(x)_{\max} = G(1) = \frac{1}{e}$10 分

由于 $a \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{e})$, 所以 $2a - \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{e}$, 即 $F(x)_{\min} > G(x)_{\max}$.

当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $F(x) > G(x)$, 即 $f(x) > g(x)$12 分

22. (12分)

【解析】(1) 依题意, 椭圆的离心率为 $\frac{2}{3}$, $\triangle TF_1F_2$ 的面积最大为 $2\sqrt{5}$.

所以 $\begin{cases} e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{4}{9} \dots\dots\dots 3 \text{ 分;} \\ bc = 2\sqrt{5} \end{cases}$

解之得, $c^2 = 4, a^2 = 9$,5 分

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 6 分;

(2) 证明: 依题意, 直线 PQ 斜率不为 0,

设 PQ 的方程为 $x = ty + 1$, $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) (y_1 > 0, y_2 < 0)$, $M(x, y)$, 联立椭圆

方程, $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1, \\ x = ty + 1 \end{cases}$,

得 $(5t^2 + 9)y^2 + 10ty - 40 = 0$, 7 分

则 $y_1 y_2 = \frac{-40}{5t^2 + 9}$, $y_1 + y_2 = \frac{-10t}{5t^2 + 9}$, $y_1 y_2 = \frac{4(y_1 + y_2)}{t}$, 9 分

由 A, P, M 三点共线可得 $\frac{y}{x+3} = \frac{y_1}{x_1+3}$,

由 B, Q, M 三点共线可得 $\frac{y}{x-3} = \frac{y_2}{x_2-3}$,

两式相除可得 $\frac{x-3}{x+3} = \frac{y_1(x_2-3)}{y_2(x_2+3)} = \frac{y_1(ty_2-2)}{y_2(ty_1+4)} = \frac{ty_1 y_2 - 2y_1}{ty_2 y_1 + 4y_2}$

$= \frac{t \cdot \frac{4(y_1 + y_2)}{t} - 2y_1}{t \cdot \frac{4(y_1 + y_2)}{t} + 4y_2} = \frac{1}{2}$, 解得 $x = 9$,11 分

综上所述, 直线 AP 与直线 BQ 相交于椭圆 C 外一点 M , 且点 M 在定直线上.12 分

方法二: 若 $l \perp x$ 轴, 不妨设 $P(1, \frac{2\sqrt{10}}{3})$, $Q(1, -\frac{2\sqrt{10}}{3})$, 则直线 AP 的方程为

$y = \frac{\sqrt{10}}{6}(x+3)$, 则直线 BP 的方程为 $y = \frac{\sqrt{10}}{6}(x-3)$, 联立可得, 点 M 的坐标是 $(9, 2\sqrt{10})$.

当直线 l 不与 x 轴垂直时, 设直线 l 的方程是 $y = kx - k$. 分别设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$.

由方程组 $\begin{cases} y = kx - k, \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1. \end{cases}$ 得, $(5+9k^2)x^2 - 18k^2x + 9k^2 - 45 = 0$.

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{18k^2}{5+9k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{9k^2 - 45}{5+9k^2}$.

$\therefore x_1 x_2 = 5x_1 + 5x_2 - 9$, 即 $\frac{12k(x_1 - 1)}{x_1 + 3} = \frac{6k(x_2 - 1)}{x_2 - 3}$.

由条件可得, 直线 AP 的方程是 $y = \frac{k(x_1 - 1)}{x_1 + 3}(x+3)$, 直线 BQ 的方程是

$y = \frac{k(x_2 - 1)}{x_2 - 3}(x-3)$.

所以，直线 AP 与直线 BQ 上的点的横坐标为 9 时，纵坐标相等，即此两直线交点 M 在直线 $x=9$ 上，且点 M 在椭圆 C 外.

综上所述，直线 AP 与直线 BQ 相交于椭圆 C 外一点 M ，且点 M 在定直线上.